Απειροστικός Λογισμός Ι

Μάθημα 10

24/03/16 ①

Θεώρημα: Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Τότε, το άθροισμά τους είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Απόδειξη:

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

$\forall k=1,\dots,n$ θέτουμε:

$m_k^f = \inf\{f(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k^f = \sup\{f(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$m_k^g = \inf\{g(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k^g = \sup\{g(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$m_k^{f+g} = \inf\{(f+g)(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k^{f+g} = \sup\{(f+g)(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

Για κάθε $k=1,\dots,n$ και κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$

$f(x)+g(x)\le M_k^f + M_k^g$

Άρα, $\sup\{f(x)+g(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}\le M_k^f+M_k^g$.

Δηλαδή $M_k^{f+g}\le M_k^f+M_k^g$

Ομοίως, $m_k^f+m_k^g\le \inf\{f(x)+g(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

Άρα, $m_k^f+m_k^g\le m_k^{f+g}$

Έτσι, $L(f,P)+L(g,P)=\sum_{k=1}^n m_k^f(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^n m_k^g(x_k-x_{k-1}) =$

$=\sum_{k=1}^n (m_k^f+m_k^g)(x_k-x_{k-1})\le \sum_{k=1}^n m_k^{f+g}(x_k-x_{k-1}) = L(f+g,P)\le$

$\le U(f+g,P)=\sum_{k=1}^n M_k^{f+g}(x_k-x_{k-1})\le \sum_{k=1}^n (M_k^f+M_k^g)(x_k-x_{k-1})=$

$=\sum_{k=1}^n M_k^f(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^n M_k^g(x_k-x_{k-1}) = U(f,P)+$

$+U(g,P).$

Scanned by CamScanner

Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχουν P_1, P_2 διαμερίσεις του $[a,b]$ ώστε

$U(f,P_1)-\varepsilon/2<\int_a^b f(x)dx<L(f,P_1)+\varepsilon/2$.

$U(g,P_2)-\varepsilon/2<\int_a^b g(x)dx<L(g,P_2)+\varepsilon/2$

Θέτουμε $P=P_1\cup P_2$

$$U(f,P)+U(g,P)-\varepsilon\le U(f,P_1)+U(g,P_2)-\varepsilon<$$
$$<\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx<L(f,P_1)+L(g,P_1)+\varepsilon\le$$
$$\le L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon.$$

Έτσι: $\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx-\varepsilon\le U(f+g,P)-\varepsilon\le U(f,P)+U(g,P)-\varepsilon<$
$<\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx<L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon\le L(f+g,P)+\varepsilon\le\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx+\varepsilon$

Εφόσον η παραπάνω ανισότητα ισχύει $\forall\varepsilon>0$:

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx\le\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\le\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx\le\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx$$

Επομένως: $\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx=\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

Συνεπώς, η $f+g$ ολοκληρώσιμη και το άθροισμά της είναι

$\int_a^b(f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

[Από τα δύο τελευταία θεωρήματα, έχουμε ότι αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Τότε, η $\lambda f+\mu g$ ολοκληρώσιμη και $\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$.]

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Τότε, η fg είναι ολοκληρώσιμες.

Scanned by CamScanner

Απόδειξη:

Εφόσον οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, είναι φραγμένες άρα $C_f, C_g > 0$ ώστε $|f(x)| \leq C_f$ και $|g(x)| \leq C_g$ $\forall x \in [a,b]$.

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$

Για κάθε $k = 1, \dots, n$ $\forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y) \leq$$
$$\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C_f(M_k^g - m_k^g) + C_g(M_k^f - m_k^f)$$

Άρα: $M_k^{fg} - m_k^{fg} \leq C_f(M_k^g - m_k^g) + C_g(M_k^f - m_k^f)$

Δηλαδή: $\sum_{k=1}^{n}(M_k^{fg} - m_k^{fg})(x_k - x_{k-1}) \leq C_f \sum_{k=1}^{n}(M_k^g - m_k^g)(x_k - x_{k-1}) + C_g \sum_{k=1}^{n}(M_k^f - m_k^f)(x_k - x_{k-1})$

$$\Rightarrow U(fg, P) - L(fg, P) \leq C_f(U(g,P) - L(g,P)) + C_g(U(f,P) - L(f,P))$$

Το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα από το κριτήριο Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Εφόσον η f ολοκληρώσιμη, από το κριτήριο Riemann υπάρχει P_1 διαμέριση του $[a,b]$

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2C_g}$$

Εφόσον η g ολοκληρώσιμη, από το κριτήριο Riemann υπάρχει P_2 διαμέριση του $[a,b]$

$$U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2C_f}$$

Θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$:

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leq C_f(U(g,P) - L(g,P)) + C_g(U(f,P) - L(f,P)) \leq$$
$$\leq C_f(U(g,P_2) - L(g,P_2)) + C_g(U(f,P_1) - L(f,P_1)) \leq C_f \frac{\varepsilon}{2C_f} + C_g \frac{\varepsilon}{2C_g} = \varepsilon.$$

Άρα, από κριτήριο Riemann, η fg ολοκληρώσιμη.

Scanned by CamScanner

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε, η $|f|$ ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη:

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$. Για $k=1,\dots,n$, $\forall x,y\in[a,b]$:

$$|f(x)|-|f(y)|\le|f(x)-f(y)|\le M_k^f-m_k^f$$

Άρα, $M_k^{|f|}-m_k^{|f|}\le M_k^f-m_k^f$

Συνεπώς, $U(|f|,P)-L(|f|,P)\le U(f,P)-L(f,P)$

Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Riemann.

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, με $m\le f(x)\le M$ $\forall x\in[a,b]$. Τότε, $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$.

Απόδειξη:

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$.

Τότε, $L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})\ge\sum_{k=1}^{n} m(x_k-x_{k-1})=m\overbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})}^{\text{τηλεσκοπικό άθροισμα}}=m(b-a)$

και όμοια $U(f,P)\le M(b-a)$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ορισμό.

Πρόταση:

α) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $f(x)\ge0$ $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx\ge0$.

β) Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

Απόδειξη:

α) Από το προηγούμενο Θεώρημα για $m=0$.

β) $g=f+(g-f)$ με $g-f$ ολοκληρώσιμη. Με $(g-f)(x)\ge0$ $\forall x$ άρα:

$\int_a^b(g(x)-f(x))\,dx\ge0$. Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος, προκύπτει: $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b\underbrace{(g(x)-f(x))}_{\ge0}\,dx\ge\int_a^b f(x)\,dx$.

Θεώρημα: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $a<c<b$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα $[a,c]$ και $[c,b]$. Σε αυτή την περίπτωση: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

Απόδειξη: Παραλείπεται!

Scanned by CamScanner

<u>Ορισμός:</u> Ορίζουμε $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Αν $a > b$ και η $f:[b,a] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, θέτουμε:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Έχουμε δει τον ορισμό του Darboux και στη συνέχεια θα δούμε τον ορισμό του Riemann.

<u>Ορισμός ολοκληρώματος</u> (κατά Riemann)

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ ώστε να ισχύει το εξής:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\forall$ διαμέριση P με

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \text{ με } \underset{\max\{x_k - x_{k-1},\ k=1,\dots,n\}}{\underset{\parallel}{\|P\|}} < \delta$$

και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, \dots, n$ να ισχύει:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I(f) \right| < \varepsilon$$

Αποδεικνύεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό του Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό του Riemann.

Σ' αυτή την περίπτωση: $\underset{\text{Riemann}}{\underset{\uparrow}{I(f)}} = \underset{\text{Darboux}}{\underset{\uparrow}{\int_a^b f(x)dx}}$

Scanned by CamScanner